

BTS - groupement B - 2000

Correction de l'épreuve de Mathématiques

EXERCICE I

1. D suit une loi normale.

Si D suit la loi normale $\mathcal{N}(25, 50; 0, 1)$ alors la variable T définie par $T = \frac{D - 25}{0,1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Il en résulte que:

$$\begin{aligned} p(25,3 \leq D \leq 25,7) &= p\left(\frac{25,3 - 25,5}{0,1} \leq \frac{D - 25,5}{0,1} \leq \frac{25,7 - 25,5}{0,1}\right) \\ &= p(-2 \leq T \leq 2) \\ &= \pi(2) - \pi(-2) \\ &= 2\pi(2) - 1 \\ &= 2 \times 0,9772 - 1 \end{aligned}$$

d'où $p(25,3 \leq D \leq 25,7) = 0,9544 \approx 0,96$

2. a. X suit une loi binomiale.

Soit l'épreuve: on prélève un boulon et on vérifie le diamètre de la tête

$\left. \begin{array}{l} \text{*on répète 10 fois cette épreuve.} \\ \text{*les épreuves sont indépendantes.} \\ \text{*chaque épreuve a 2 issues : conforme avec } p=0,96 \\ \text{ou non conforme avec } q=0,04 \end{array} \right\}$ donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,96)$.

- b. Probabilité d'avoir au plus un boulon non conforme.

On demande donc: $p(X \geq 9)$. soit:

$$\begin{aligned} p(X \geq 9) &= p(X = 9) + p(X = 10) \\ &= C_{10}^9(0,96)^9 \times (0,04)^1 + C_{10}^{10}(0,96)^{10} \end{aligned}$$

d'où $p(X \geq 9) = 0,94$

3. Test d'hypothèse

- a. Loi suivie par \bar{Y}

D'après le cours, on sait que si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors \bar{Y} suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Ici, on a $\mu = 10$, $\sigma = 0,1$ avec $n = 100$. Donc \bar{Y} suit la loi normale $\mathcal{N}(10; 0,01)$.

- b. Calcul de h tel que $p(10 - h \leq \bar{Y} \leq 10 + h) = 0,95$

\bar{Y} suit la loi normale $\mathcal{N}(10; 0,01)$ donc la variable T définie par $T = \frac{\bar{Y} - 10}{0,01}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} p(10 - h \leq \bar{Y} \leq 10 + h) &= p\left(-\frac{h}{0,01} \leq T \leq \frac{h}{0,01}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{h}{0,01}\right) - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que: $2\pi\left(\frac{h}{0,01}\right) - 1 = 0,95$ soit $\pi\left(\frac{h}{0,01}\right) = 0,975$ d'où $\frac{h}{0,01} = 1,96$.

Donc $h = 0,0196 \approx 0,02$

Il en résulte que si H_0 est vraie, il y a 95% de chances de prélever un échantillon dont la moyenne appartient à l'intervalle: $[9,98; 10,02]$

- c. Règle de décision.

On prélève un échantillon aléatoire de 100 boulons, et on calcule la moyenne \bar{y} des diamètres de leurs pieds. Si cette moyenne est dans l'intervalle $[9,98; 10,02]$ alors on accepte l'hypothèse H_0 , sinon on la refuse.

- d. Utilisation du test.

L'échantillon a une moyenne $\bar{y} = 10,03$ qui n'appartient pas à l'intervalle $[9,98; 10,02]$. On refuse donc H_0 et on considère au seuil de 5%, que les boulons ne sont pas conformes pour le diamètre de leur pied.

EXERCICE II

A - Résolution d'une équation différentielle

1. Résolution de (E_0) : $y'' - 4y = 0$

L'équation caractéristique est: $r^2 - 4 = 0$, qui admet les 2 racines réelles $r_1 = -2$. et $r_2 = 2$. On en déduit que les solutions de (E_0) sont les fonctions y de la forme: $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ où A et B sont 2 constantes réelles quelconques

2. $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E)

$$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}x(-2e^{-2x}) \\ &= \frac{4}{3}(-2x + 1)e^{-2x} \end{aligned} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{4}{3}(-2)e^{-2x} + \frac{4}{3}(-2x + 1)(-2e^{-2x}) \\ &= \frac{16}{3}(x - 1)e^{-2x} \end{aligned}$$

On vérifie alors que:

$$\begin{aligned} g''(x) - 4g(x) &= \frac{16}{3}(x - 1)e^{-2x} - 4 \times \frac{4}{3}xe^{-2x} \\ &= -\frac{16}{3}e^{-2x} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que g est bien solution particulière de (E) .

3. Ensemble des solutions de (E) .

On obtient la solution générale de (E) en additionnant une solution particulière de (E) et la solution générale de (E_0) . Les fonctions y solutions de (E) sont donc de la forme:

$$y(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} + Ae^{2x} + Be^{-2x} \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont 2 constantes réelles quelconques}$$

4. Solution particulière h telle que: $h(0) = \frac{4}{3}$ et $h'(0) = -\frac{4}{3}$

$$h(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x} + Ae^{2x} + Be^{-2x} \text{ donc } h'(x) = \frac{4}{3}(-2x + 1)e^{-2x} + 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

Il en résulte que: $h(0) = A + B$ et $h'(0) = \frac{4}{3} + 2A - 2B$

$$\text{Il s'en suit que: } \left\{ \begin{array}{l} A + B = \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} + 2A - 2B = -\frac{4}{3} \end{array} \right\} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} A + B = \frac{4}{3} \\ A - B = -\frac{4}{3} \end{array} \right\} \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{4}{3} \end{array} \right\}$$

On en déduit que: $h(x) = \frac{4}{3}(x + 1)e^{-2x}$

B - Étude d'une fonction

1. a. Calcul de $f'(x)$

Comme $(1 + x)' = 1$ et $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, on en déduit que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3} \times 1 \times e^{-2x} + \frac{4}{3}(x + 1)(-2e^{-2x}) \\ &= -\frac{4}{3}(2x + 1)e^{-2x} \end{aligned}$$

- b. Sens de variation de f .

e^{-2x} est toujours strictement positive, $-4/3$ est toujours strictement négatif, et $(2x + 1)$ est strictement positif pour x positif. $f'(x)$ est donc toujours négative sur $[0, +\infty[$ On en déduit que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

2. Limite de f en $+\infty$

$$f(x) = \frac{4}{3}(1 + x)e^{-2x} = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}2xe^{-2x} \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x} = 0$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et par conséquent une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

3. a. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto e^{-2x}$.

On sait que $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ donc:

$$\begin{aligned} e^{-2x} &= 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{4} + \frac{(-2x)^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

- b. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f .

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x} &= \frac{4}{3}(1+x) \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - x + \frac{2}{3}x^3 \right) + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

- c. Tangente au point d'abscisse 0.

La tangente correspond au développement limité à l'ordre 1 donc: $T : y = \frac{4}{3}(1-x)$

La position relative de T et C est donné par le signe de la différence $f(x) - \frac{4}{3}(1-x)$

Il est immédiat que: $f(x) - \frac{4}{3}(1-x) = \frac{4}{9}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$

Or pour $x \geq 0$ on a $\frac{4}{9}x^3 \geq 0$, on en déduit que C est au dessus de T pour x positif au voisinage de 0.

4. a. Calcul de $I = \int_0^3 f(x) dx$

$$I = \int_0^3 f(x) dx = \frac{4}{3} \int_0^3 (1+x)e^{-2x} dx$$

$$\text{posons } \left\{ \begin{array}{l} U = 1+x \\ V' = e^{-2x} \end{array} \right\} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} U' = 1 \\ V = -\frac{e^{-2x}}{2} \end{array} \right\}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} \left[(1+x)e^{-2x} \right]_0^3 + \frac{1}{2} \int_0^3 e^{-2x} dx \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2} (4e^{-6} - 1) - \frac{1}{4} \left[e^{-2x} \right]_0^3 \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(-2e^{-6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{-6} - 1) \right) \\ &= 1 - 3e^{-6} \end{aligned}$$

soit $I = 1 - 3e^{-6} \approx 0,99$

I représente, en unité d'aire, l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

- b. Calcul de $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t}$

$$\text{On a } \left(-\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t} = -\frac{2}{3}te^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-2t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{2}{3}te^{-2t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}e^{-2t} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t} = 0$$

- c. Calcul de $J = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

$$A(t) = \int_0^t f(x) dx \quad \text{donc } A(t) = \left(-\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t} + 1.$$

On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t} = 0$, il en résulte que $J = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 1$

- d. Calcul de $J - I$ et interprétation graphique.

On a $I = 1 - 3e^{-6} \approx 0,99$ et $J = 1$ donc $J - I = 3e^{-6} \approx 0,007$

Il est alors immédiat que $0 \leq J - I \leq 10^{-2}$.

$J - I$ représente l'aire de la partie ouverte du plan comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et située à droite de la droite verticale d'équation $x = 3$.