BTS - groupement B - 2001

Correction de l'épreuve de Mathématiques

EXERCICE I

Partie A

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale.

L' épreuve n'a que deux issues possibles, et on a la répétition de manière indépendante de cette épreuve. En conséquence, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,9$.

2. Probabilité de l'événement 8 pièces au moins sont conformes.

L'évènement " 8 pièces au moins soit conformes " est la réunion des évènements disjoints " exactement 8 pièces sont conformes ", "exactement 9 pièces sont conformes " et "exactement 10 pièces sont conformes ".

$$\begin{aligned} p &= p\left(X=8\right)+p\left(X=9\right)+p\left(X=10\right) \\ &= C_{10}^{8}\left(0,9\right)^{8}\left(0,1\right)^{2}+C_{10}^{9}\left(0,9\right)^{9}\left(0,1\right)+C_{10}^{10}\left(0,9\right)^{10}\left(0,1\right)^{0} \\ &\simeq 0,930 \end{aligned}$$

Partie B

1. Calcul de $p\left(246 \leqslant M \leqslant 254\right)$

M suit la loi normale $\mathcal{N}(250; 1,94)$ donc $T = \dfrac{M-250}{1,94}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

si $M = 246$ alors $T \simeq -2,06$ et si $M = 254$ alors $T \simeq 2,06$

donc $p = p\left(246 \leqslant M \leqslant 254\right) = p\left(-2,06 \leqslant T \leqslant 2,06\right) = 2\Pi\left(2,06\right) - 1 \simeq 0,961$

2. Calcul de $p\left(147 \leqslant N \leqslant 153\right)$

N suit la loi normale $\mathcal{N}(150; 1,52)$ donc $T = \dfrac{N-150}{1,52}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

si $N = 147$ alors $T \simeq -1,97$ et si $N = 153$ alors $T \simeq 1,97$

donc $p = p\left(147 \leqslant N \leqslant 153\right) = p\left(-1,97 \leqslant T \leqslant 1,97\right) = 2\Pi\left(1,97\right) - 1 \simeq 0,951$

3. Probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme.

Commes les variables M et N sont indépendantes, la probabilité p qu'une pièce soit conforme est donc égale à :

$p\left[\left(246 \leqslant M \leqslant 254\right) \cap \left(147 \leqslant N \leqslant 153\right)\right] = p\left(246 \leqslant M \leqslant 254\right) \times p\left(147 \leqslant N \leqslant 153\right)$

donc $p = 0,951 \times 0,961 \simeq 0,914$

Partie C

1. En utilisant les données du texte, on a immédiatement :

$\mathrm{P(A)} = \dfrac{60}{100} = 0,6;\quad \mathrm{P(B)} = \dfrac{2}{5} = 0,4;\quad \mathrm{P(C/A)} = 0,914;\quad \mathrm{P(C/B)} = 0,879$

2. En appliquant la formule des probabilités conditionnelles, on obtient :

$\mathrm{P(C \cap A)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(C/A)} = 0,6 \times 0,914 = 0,548$

De même :$\mathrm{P(C \cap B)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(C/B)} = 0,4 \times 0,879 = 0,352$

3. Calcul de $P(C)$

Sachant que $\mathrm{C} = (\mathrm{C} \cap \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} \cap \mathrm{B})$, la formule des probabilités totale fournit :

$\mathrm{P(C)} = \mathrm{P(C \cap A)} + \mathrm{P(C \cap B)} = 0,9$

EXERCICE II

A. Résolution d'une équation différentielle.

1. **Résolution de l'équation différentielle** (E_0) :$y' - 2y = 0$
   Le cours permet de dire que les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :$y(x) = ke^{2x}$ où k est une constante réelle.

2. h est une solution particulière de (E)
   $h(x) = xe^{2x}$ donc $h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$
   On vérifie alors que $h'(x) - 2h(x) = e^{2x}$
   Ce qui prouve que h est solution particulière de (E).

3. Ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)
   D'après le cours, on peut dire que les fonctions y, solutions de l'équation différentielle (E) sont définies par:
   $y(x) = ke^{2x} + h(x) = ke^{2x} + xe^{2x}$

4. Solution particulière telle que $f(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1$.
   $f(0) = ke^0 + 0 \times e^0 = k$ d'où $k = -1$
   La solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$ est donc définie pour tout x réel par :$f(x) = -e^{2x} + xe^{2x} = e^{2x}(-1 + x)$

B. Étude d'une fonction

1. **a.** Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$f(x) = (x-1)e^{2x}$ donc

$$\left.\begin{array}{|l} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b. Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$f(x) = (x-1)e^{2x} = xe^{2x} - e^{2x}$ donc

$$\left.\begin{array}{|l} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

c. Interprétation graphique.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, on en déduit que la courbe représentative de f admet comme asymptote horizontale l'axe des abscisses.

2. **a.** Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{2x} + (x-1)\left(2e^{2x}\right) \\ &= (2x-1)e^{2x} \end{aligned}$$

b. Résolution de $f'(x) \geqslant 0$
Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-1)$ donc si $x \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $f'(x) \geqslant 0$.
On en déduit que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2}, \infty\right[$.

c. Tableau de variations

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a.** Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 3, de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$
Le formulaire donne: $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{6}t^3 + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to0} \varepsilon(t) = 0$
On remplace t par $2x$ et on obtient :
$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$

b. Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 3, de la fonction f

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{2x} - e^{2x} \\ &= x\left(1 + 2x + 2x^2\right) - \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \\ &= -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

c. Tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

On sait qu'une équation de cette tangente est donnée par la partie principale du développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 1 de f.

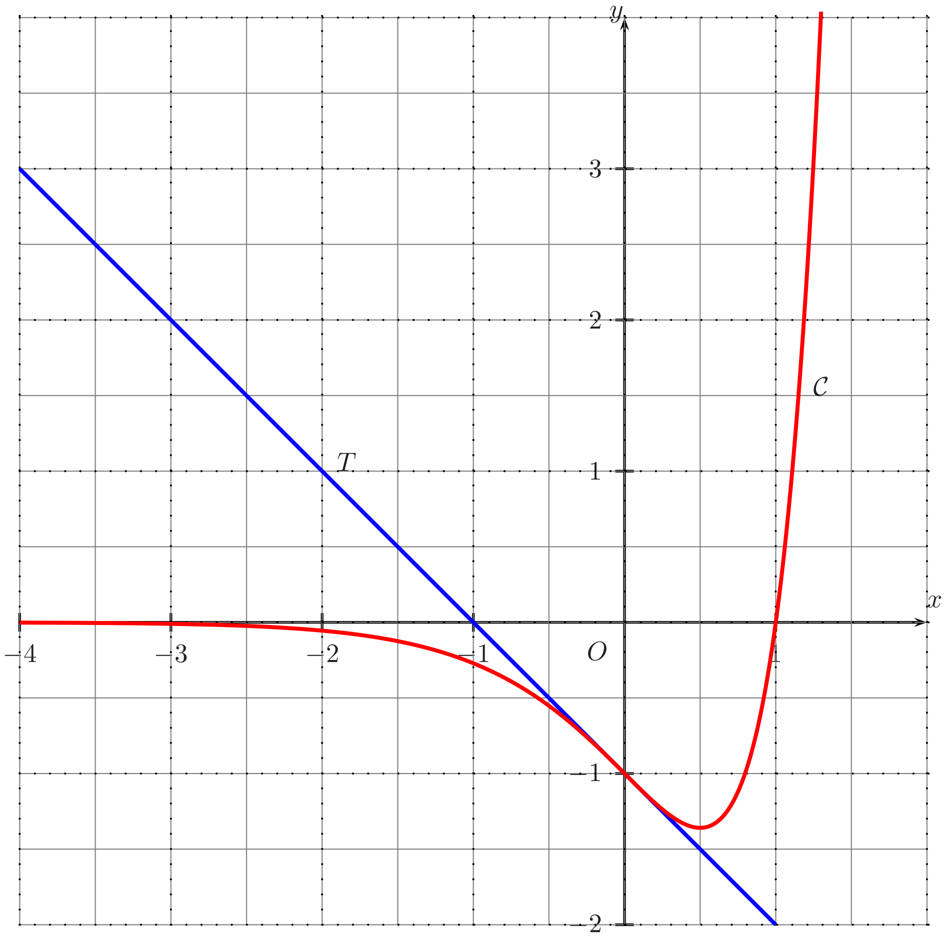
d'où l'quation de T: $y = -1 - x$

La position relative de C et de T au voisinage de ce point, est déterminé par le signe de :

$f(x) - (-x - 1) = \dfrac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Donc pour $x < 0$, alors la courbe C est en-dessous de T, et pour $x > 0$, la courbe C est au-dessus de T.

d. Représentation graphique.



C. Calcul intégral

1. Calcul de $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)dx$

Posons: $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x - 1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{array}\right.$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} \frac{e^{2x}}{2}dx \\ &= \left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{\alpha}^{0} \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} \\ &= -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha} \end{aligned}$$

2. **a.** Calcul de $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$

$I(\alpha) = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} + \dfrac{3}{4}e^{2\alpha}$

$$\left|\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha \to -\infty} -\dfrac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to -\infty} \dfrac{3}{4}e^{2\alpha} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = -\dfrac{3}{4}$$

b. Interprétation graphique.

L'aire de la portion de plan définie par:

$$\left|\begin{array}{l} 0 \leqslant y \leqslant f(x) \\ x \leqslant \alpha \end{array}\right\} \text{ est } \dfrac{3}{4} \text{ en unité d'aire.}$$