BTS - groupement B 2 - 2003

Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice1

1. *Défaut d'approvisionnement*

   (a) Calcul de $P(E_1)$

   $$\begin{aligned} P(E_1) &= P(A \cap B) \\ &= P(A) \times P(B) \text{ car A et B sont indépendants.} \\ &= 0,04 \times 0,02 \\ &= 0,0008 \end{aligned}$$

   (b) Calcul de $P(E_2)$

   $$\begin{aligned} P(E_2) &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,04 + 0,02 - 0,0008 \\ &= 0,0592 \end{aligned}$$

2. *Pannes de la machine sur une durée de 100 jours.*

   (a) Calcul de $P(X \leq 2)$

   $$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 \\ &= 0,9856 \end{aligned}$$

   (b) La machine a au plus 4 pannes pendant la période de 100 jours consécutifs

   On demande le calcul de $P(X \leq 4)$

   $$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 + 0,0126 + 0,0016 \\ &= 0,9998 \end{aligned}$$

   (c) Plus petit entier n tel que : $p(X \leq n) \geq 0,99$

   On a vu que $P(X \leq 2) = 0,9856$ donc $P(X \leq 2) \leq 0,99$

   De plus : $P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X = 3) = 0,9856 + 0,0126 = 0,9982$ donc $P(X \leq 3) \geq 0,99$

   Le plus petit entier n tel que : $p(X \leq n) \geq 0,99$ est donc 3.

3. Embouteillage: calcul de la probabilité qu'une bouteille satisfasse à la norme.

   La variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(1,5; 0,01)$ donc la variable aléatoire $T = \dfrac{Y - 1,5}{0,01}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

   La probabilité demandée est: $$\begin{aligned} p &= P(1,47 \leq Y \leq 1,53) \\ &= P(-3 \leq T \leq 3) \\ &= 2\pi(3) - 1 \\ &= 2 \times 0,99865 - 1 \\ &= 0,997 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

4. Fiabilité

   (a) Probabilité qu'une machine fonctionne plus de 200 jours sans panne.

   On demande $P(T > 200) = e^{-0,005 \times 200} = e^{-1} \simeq 0,3679$

   (b) Calcul de t tel que $P(T > t) = 0,8$

   On a : $P(T > t) = e^{-0,005t} = 0,8$ donc $\ln e^{-0,005t} = \ln 0,8$ soit $-0,005t = \ln 0,8$

   d'où $t = -\dfrac{\ln 0,8}{0,005} \simeq 44,6$ arrondi à 44 jours par défaut.

Exercice2

Partie A. Résolution d'une équation différentielle.

1. Résolution de $(E_0) : y' + y = 0$

   $x \mapsto -x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -1$.

   La solution générale, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = -y$ est $y = ke^{-x}$ où k désigne une constante réelle quelconque.

2. La fonction h est une solution particulière de (E)

   $h(x) = 2xe^{-x}$ donc

   $$\begin{aligned} h'(x) &= 2e^{-x} + 2x\left(-e^{-x}\right) \\ &= (2-2x)\,e^{-x} \end{aligned}$$

   On en déduit que: $\begin{aligned} h'(x) + h(x) &= (2-2x)\,e^{-x} + 2xe^{-x} \\ &= 2e^{-x} \end{aligned}$

   Ce qui prouve que h est bien solution de l'équation (E)

3. Ensemble des solution de (E)

   On obtient la solution générale de l'équation (E) en ajoutant, une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation(E_0)
   La solution générale de (E) est donc: $y = 2xe^{-x} + ke^{-x} = (2x+k)\,e^{-x}$ où k désigne une constante réelle quelconque.

4. Recherche de la solution f

   f étant solution de (E) on a pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = (2x+k)\,e^{-x}$
   La condition initiale $f(0) = 3$ donne $k = 3$ d'où $f(x) = (2x+3)\,e^{-x}$

Partie B. Etude d'une fonction

1. (a) Déterminer graphiquement $f(0)$
   Il est immédiat que: $f(0) = 3$

   (b) Déterminer $f'(0)$

   La tangente au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{3-0} = -1$

   Il en résulte que: $f'(0) = -1$

   (c) Déterminer a et b.
   On a $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ donc $f'(x) = (a - ax - b)\,e^{-x}$
   d'où $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(0) - 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = 3 \\ a - b = -1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 3 \\ a = 2 \end{array}\right.$
   D'où $f(x) = (2x+3)\,e^{-x}$

2. (a) Calcul de $f'(x)$
   L'application de $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = 2x+3$ et $v = e^{-x}$ donne:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x} + (2x+3)\left(-e^{-x}\right) \\ &= (-2x-1)\,e^{-x} \end{aligned}$$

   (b) Résolution de l'inéquation $f'(x) \geq 0$
   Une exponentielle étant toujours strictement positive, $f'(x)$ a même signe que $(-2x-1)$
   Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$

   (c) Sens de variation de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	

3. (a) Développement limité de : $x \longmapsto e^{-x}$
   On a $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$..

   En posant $t = -x$, on obtient $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

(b) Développement limité de f au voisinnage de o.
Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)$ s'obtient en multipliant $(2x+3)$ par $\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 2.

d'où : $f(x) = 3 - x - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Partie C. Calcul intégral

1. Primitive de f

   Pour tout x réel : $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$. Par intégration, on obtient : $F(x) = -f(x) - 2e^{-x}$

   $$\begin{aligned} \text{D'où } F(x) &= -(2x+3)e^{-x} - 2e^{-x} \\ &= (-2x-5)e^{-x} \end{aligned}$$

2. (a) Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\ dx$

   $$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} f(x)\ dx \\ &= [F(x)]_0^{1/2} \\ &= F(1/2) - F(0) \\ &= -6e^{-1/2} - (-5) \\ &= 5 - 6e^{-1/2} \end{aligned}$$

   (b) Valeur approchée de I.
   $I = 1,361$ à 10^{-3}.

3. (a) Calcul de $J = \displaystyle\int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\ dx$

   $$\begin{aligned} J &= \int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\ dx \\ &= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} \\ &= \frac{65}{48} \end{aligned}$$

   (b) Valeur approchée de J
   $J = 1,354$ à 10^{-3}

   (c) I et J diffèrent de moins de 10^{-2}

   $$\begin{aligned} I - J &= 1,361 - 1,354 \\ &= 0,007 \\ &< 10^{-2} \end{aligned}$$