BTS - groupement B - 2006

Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1

A . Résolution d'une équation différentielle .

1. Résolution de (E_0) : $y'' - 3y' - 4y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r - 4 = 0$. Ses solutions sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x}$, où λ et μ sont deux nombres réels quelconques.

2. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$h(x) = xe^{-x}$ donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times e^{-x} + x(-e^{-x}) \\ &= (1-x)\, e^{-x} \end{aligned}$$

et $$\begin{aligned} h''(x) &= (-1)\, e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) \\ &= (x-2)\, e^{-x} \end{aligned}$$

on vérifie que : $$\begin{aligned} h''(x) - 3h'(x) - 4h(x) &= [(x-2) - 3(1-x) - 4x]\, e^{-x} \\ &= [-5]\, e^{-x} \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $h(x) = xe^{-x}$ est solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

Toutes les solutions de l'équation (E) sont obtenues en faisant la somme des fonctions solutions de (E_0) et d'une solution particulière de l'équation (E).

Il en résulte que $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x} + xe^{-x}$.

4. Solution particulière f telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

$f(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{4x} + xe^{-x}$ donc $f'(x) = -\lambda e^{-x} + 4\mu e^{4x} + (1-x)\, e^{-x}$

il en résulte que: $f(0) = \lambda e^{-0} + \mu e^{0} + 0 \times e^{-0} = \lambda + \mu$

et $f'(0) = -\lambda e^{-0} + 4\mu e^{0} + (1-0)\, e^{-0} = -\lambda + 4\mu + 1$

Les conditions initiales conduisent à la résolution du système: $\left\{\begin{array}{r} \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda + 4\mu + 1 = -1 \end{array}\right.$

Equivalent à $\left\{\begin{array}{r} \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda + 4\mu = -2 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{r} \lambda = 2 \\ 5\mu = 0 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 0 \end{array}\right.$

On en déduit que : $$\begin{aligned} f(x) &= 2 \times e^{-x} + 0 \times e^{4x} + xe^{-x} \\ &= (x+2)\, e^{-x} \end{aligned}$$

B. Etude locale d'une fonction

1. Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.

On sait que : $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + t^3 \varepsilon(t)$ donc $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2+x)\, e^{-x} \\ &= (2+x)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)\right) \\ &= 2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

2. Tangente au point d'abscisse 0

On sait que l'équation de la tangente correspond au développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0. Il en résulte que la tangente T a pour équation : $y = 2 - x$

3. Position relative de C et T

$$\begin{aligned} f(x)-(2-x) &= \left(2-x+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)-(2-x) \\ &= \frac{x^3}{6}+x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$

On en déduit qu'au voisinage de 0:

- si $x<0$ alors $f(x)-y<0$, la tangente T est au dessus de C.
- si $x>0$ alors $f(x)-y>0$, la tangente T est en dessous de C.

C. Calcul intégral.

1. Calcul de $I=\displaystyle\int_0^{0,6} f(x)\,dx$.

Posons $\begin{cases} u(x)=x+2 \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

La formule d'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} I &= \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^{0,6}+\int_0^{0,6} e^{-x}dx \\ &= \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^{0,6}+\left[-e^{-x}\right]_0^{0,6} \\ &= -2,6e^{-0,6}+2-e^{-0,6}+1 \\ &= 3-3,6e^{-0,6} \end{aligned}$$

2. Valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I

La calculatrice donne : $I\approx 1,024$ à 10^{-3} près par défaut.

3. Donner une interprétation graphique de I.

On peut alors affirmer que I correspond à l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x=0$ et $x=0,6$.

Exercice 2

A. Ajustement affine

1. a. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire

La calculatrice donne $r\simeq 0,98$ à 10^{-2} près par défaut.

b. Déterminer une équation de la droite de régression de $y$en x.

La calculatrice donne : $y=0,406x+15$

2. Estimation du nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

Nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7 :$y=0,406\times 7+15=17,842$

On peut estimer à 17 842 le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

B. Probabilités conditionnelles

1. Déterminer les probabilités$P(A)$, $P(B)$, $P(C/A)$, $P(C/B)$.

D'après l'énoncé :$P(A)=\dfrac{900}{1500}=\dfrac{3}{5}=0,60$;

$P(B)=\dfrac{600}{1500}=\dfrac{2}{5}=0,40$;

$P(D/A)=\dfrac{1}{100}=0,01$ et $P(D/B)=\dfrac{5}{100}=0,05$

2. Calculer$P(D\cap A)$ et $P(D\cap B)$.

$P(D\cap A)=P(D/A)\times P(A)=0,01\times 0,60=0,006$.

$P(D\cap B)=P(D/B)\times p(B)=0,05\times 0,40=0,02$.

3. En admettant que $D=(D\cap A)\cup(D\cap B)$, calculer $P(D)$ et $P\left(\bar{D}\right)$.

Les événements $D\cap A$ et $D\cap B$ sont incompatibles, donc :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D\cap A)+P(D\cap B) \\ &= 0,006+0,02 \\ &= 0,006+0,02 \\ &= 0,026 \end{aligned}$$

Il en résulte que : $P\left(\bar{D}\right) \begin{aligned}[t] &= 1 - P(D) \\ &= 1 - 0,026 \\ &= 0,974 \end{aligned}$

C. Loi normale

Calculer la probabilité qu'une chaudière soit amortie.

On demande le calcul de $P(X \geq 10)$

La variable aléatoire Xsuit la loi normale $\mathcal{N}$ (15 ; 3), la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 15}{3}$ suit la loi normale centrée réduite .

Si X=10 alors $T = \dfrac{10 - 15}{3} = -\dfrac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P\left(T \geq -\frac{5}{3}\right) \\ &= 1 - \pi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \pi\left(\frac{5}{3}\right)\right) \\ &= \pi\left(\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

donc $P(X \geq 10) \simeq \pi(1,67) \simeq 0,952$

La probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur est de 0, 952 à 10^{-3} près.

D. Intervalle de confiance

1. Estimation ponctuelle

Proportion des chaudières sans défaut dans l'échantillon: $f = \dfrac{94}{100} = 0,94$.

$\dfrac{94}{100} = 0,94$ est donc une estimation ponctuelle de p.

2. Estimation de p avec un intervalle de confiance.

Intervalle au coefficient de confiance 95%:

$$\left[0,94 - 1,96\sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{100}};0,94 + 1,96\sqrt{\frac{0,94 \times 0,06}{100}}\right] \simeq [0,893; 0,986]$$

donc: Intervalle au coefficient de confiance 95%: $[0,89; 0,99]$

3. " Le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question **2.** "

Cette affirmation est fausse.