BTS - groupement B - 2008

Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1

A . Résolution d'une équation différentielle .

1. Résolution de (E_0) : $y' - 2y = 0$.

D'après le formulaire : la fonction $x \longmapsto \dfrac{b}{a} = -2$, cette fonction admet pour primitive : $x \longmapsto -2x$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = ke^{2x}$, où k est un nombre réel quelconque.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (-x-1)e^x$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$g(x) = (-x-1)e^x$ donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= -1 \times e^x + (-x-1)e^x \\ &= (-x-2)\,e^x \end{aligned}$$

on vérifie que : $\begin{aligned} g'(x) - 2g(x) &= \left[(-x-2) - 2(-x-1)\right] e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$

Ce qui prouve que $g(x) = (-x-1)e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)

Toutes les solutions de l'équation (E) sont obtenues en faisant la somme des fonctions solutions de (E_0) et d'une solution particulière de l'équation (E).

Il en résulte que $y(x) = ke^{2x} - (x+1)\,e^x$.

4. Solution particulière f telle que $f(0) = 0$.

$f(x) = ke^{2x} - (x+1)\,e^x$ donc $f(0) = ke^0 - (0+1)\,e^0 = k - 1$

La condition initiale nécessite que: $k - 1 = 0$ donc que $k = 1$.

On en déduit que: $f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$

B. Etude locale d'une fonction

1. **a.** Calcul de $f'(x)$

$f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$

donc $\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} - \left[(x+1)\,e^x + e^x\right] \\ &= 2e^{2x} - (x+2)\,e^x \\ &= e^x\left[2e^x - (x+2)\right] \\ &= e^x\left(2e^x - 2 - x\right) \end{aligned}$

b. Tangente au point d'abscisse 0

$$\begin{aligned} f'(0) &= e^0\left(2e^0 - 2 - 0\right) \\ &= 1(2-2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La tangente a un coefficient directeur nul, elle est donc horizontale.

2. **a.** Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.

On sait que : $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ donc $e^{2x} = 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

d'où $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

b. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f.

$f(x) = e^{2x} - (x+1)\,e^x$

donc $\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + 2x + 2x^2\right) - (x+1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 - x - x^2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \\ &= \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \end{aligned}$

*C. **Calcul intégral***.

1. Calcul de $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-0,3}^{0,3} \\ &= \frac{0,3^3}{6} + \frac{0,3^3}{6} \\ &= 0,009 \end{aligned}$$

2. Calcul de $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} dx$.

$$\begin{aligned} J &= \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_{-0,3}^{0,3} \\ &= \frac{1}{2} e^{0,6} - \frac{1}{2} e^{-0,6} \\ &= 0,5\left(e^{0,6} - e^{-0,6}\right) \end{aligned}$$

3. Calcul de $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^{x} dx$.

Posons $\left\{ \begin{array}{l} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^x \end{array} \right.$ alors $\left\{ \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^x \end{array} \right.$

La formule d'intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned} K &= \left[(x+1)e^x\right]_{-0,3}^{0,3} - \int_{-0,3}^{0,3} e^x dx \\ &= 1,3e^{0,3} - 0,7e^{-0,3} - e^{0,3} + e^{-0,3} \\ &= 0,3\left(e^{0,3} + e^{-0,3}\right) \end{aligned}$$

4. Calcul de $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x) dx$.

a. Valeur exacte de L.

$$\begin{aligned} L &= \int_{-0,3}^{0,3} \left[e^{2x} - (x+1)e^x\right] dx \\ &= \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} dx - \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^x dx \\ &= J - K \\ &= 0,5\left(e^{0,6} - e^{-0,6}\right) - 0,3\left(e^{0,3} + e^{-0,3}\right) \end{aligned}$$

b. Valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}

La calculatrice donne: $L \simeq 0,00945$

c. La valeur exacte de I et la valeur approchée de L diffèrent de $4,5 \times 10^{-4}$

$|I - L| = 0,00945 - 0,009 = 0,00045 = 4,5 \times 10^{-4}$

Exercice 2

A. Loi normale

1. Calcul de $P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5)$

La variable aléatoire Xsuit la loi normale $\mathcal{N}$ (10 ; 0,21), la variable aléatoire $T = \dfrac{X-10}{0,21}$ suit la loi normale centrée réduite .

Si X=9,5 alors $T = \dfrac{9,5-10}{0,21} = -\dfrac{0,5}{0,21} \simeq -2,38.$

Si X=10,5 alors $T = \dfrac{10,5-10}{0,21} = \dfrac{0,5}{0,21} \simeq 2,38.$

$$\begin{aligned} P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) &= P(-2,38 \leqslant T \leqslant 2,38) \\ &= 2\pi(2,38) - 1 \\ &\simeq 2 \times 0,9913 - 1 \\ &\simeq 0,983 \end{aligned}$$

donc $P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) \simeq 0,983$

2. Probabilité qu'une pièce soit conforme

On demande le calcul de $p = P[(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) \cap (10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5)]$

Comme les variables X et Y sont indépendantes, on en déduit que: $p = P(9,5 \leqslant X \leqslant 10,5) \times P(10,5 \leqslant Y \leqslant 11,5)$

Il s'en suit que: $p = 0,983 \times 0,985 \simeq 0,968$

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1. Loi suivie par Z.

Soit l'épreuve: on prélève une pièce dans le stock et on vérifie si elle est défectueuse.

$$\left|\begin{array}{l} \star\text{on répète 50 fois cette épreuve.} \\ \star\text{les épreuves sont indépendantes.(tirage avec remise)} \\ \star\text{chaque épreuve a 2 issues : défectueuse avec p=0,03} \\ \quad\text{ou non défectueuse avec q=1-0,03=0,97} \end{array}\right\} \text{donc } Z \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(50; 0,03).$$

2. Calcul de $P(Z=0)$ et $P(Z \leqslant 2)$.

$p(Z=0) = C_{50}^{0}(0,03)^0 \times (0,97)^{50} \simeq 0,218$

$$\begin{aligned} p(Z \leqslant 2) &= p(Z=0) + p(Z=1) + p(Z=2) \\ &= C_{50}^{0}(0,03)^0 \times (0,97)^{50} + C_{50}^{1}(0,03)^1 \times (0,97)^{49} + C_{50}^{2}(0,03)^2 \times (0,97)^{48} \\ &= 0,218 + 0,337 + 0,255 \\ &\simeq 0,810 \end{aligned}$$

3. **a.** Paramètre de la loi de Poisson.

La loi de Poisson aura pour paramètre: $\lambda = np$

donc $\lambda = 50 \times 0,03 = 1,5$

b. Probabilité qu'au plus deux pièces soient défectueuses.

On demande en fait le calcul de $p(Z_1 \leqslant 2)$

$$\begin{aligned} p(Z_1 \leqslant 2) &= p(Z_1 = 0) + p(Z_1 = 1) + p(Z_1 = 2) \\ &= 0,223 + 0,335 + 0,251 \\ &= 0,809 \end{aligned}$$

C. Intervalle de confiance

1. Estimation ponctuelle

La fréquence dans l'échantillon est : $f = \dfrac{96}{100} = 0,96.$

$\dfrac{96}{100} = 0,96$ est donc une estimation ponctuelle de la fréquence p.

2. Estimation de p avec un intervalle de confiance.

Intervalle au coefficient de confiance 95%:

$$\left[0,96 - 1,96\sqrt{\frac{0,96 \times 0,04}{100}}; 0,96 + 1,96\sqrt{\frac{0,96 \times 0,04}{100}}\right] \simeq [0,8216; 0,9984]$$

donc: Intervalle au coefficient de confiance 95%: $[0,822; 0,998]$