# Correction du sujet de BTS 2009

*Exercice 1 :*

A.

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$
   Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 = 0$
   L'équation caractéristique possède une solution double $r = 1$
   Les solutions de l'équation différentielle ($E_0$) sont $f(x) = (\lambda x + \mu)\, e^x$
2. $h'(x) = 8x\, e^x + 4x^2\, e^x = e^x(8x + 4x^2)$
   $h''(x) = e^x(8x + 4x^2) + e^x(8 + 8x) = e^x(8 + 16x + 4\,x^2)$
   $h''(x) - 2h'(x) + h(x) \quad = e^x(8 + 16x + 4\,x^2) - 2\,e^x(8x + 4x^2) + e^x(4x^2)$
   $= e^x(8 + 16x + 4\,x^2 - 16x - 8x^2 + 4x^2)$
   $= 8e^x$
   donc $h(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E)
3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont
   $f(x) = (\lambda x + \mu)e^x + 4x^2e^x = e^x(4x^2 + \lambda x + \mu)$
4. $f(0) = -4 \Leftrightarrow \mu = -4$
   $f'(x) = e^x(4x^2 + \lambda x + \mu) + e^x(8x + \lambda) = e^x(4x^2 + (\lambda+8)x + (\mu + \lambda))$
   $f'(0) = -4 \Leftrightarrow \mu + \lambda = -4$ or $\mu = -4$ donc $\lambda = 0$
   La solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$ est : $f(x) = e^x(4x^2 - 4)$

B.

1. **a.** $f(x)$ est de la forme $u \times v$ avec $u = 4x^2 - 4$ et $v = e^x$
   donc $f'(x) = u' \times v + u \times v' = 8xe^x + (4x^2 - 4)\, e^x = e^x(4x^2 + 8x - 4) = 4(x^2 + 2x - 1)e^x$
   **b.** la tangente est parallèle à l'axe des abscisses lorsque $f'(x) = 0$ donc lorsque le polynôme du seconde degré $x^2 + 2x - 1$ s'annule. Les racines de ce polynôme sont
   $(-1+\sqrt{2}) \approx 0{,}41$ et $(-1+\sqrt{2}) \approx -2{,}41$
2. **a.** Le développement limité, à l'ordre 2, de la fonction $x \rightarrow e^x$ est $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$
   Par multiplication des développements limités et suppression des termes d'ordre supérieur à 2 on obtient le développement limité de la fonction $f(x)$
   $f(x) = (4x^2 - 4) - 4x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$
   $= -4 - 4x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$
   **b.** Une équation de la tangente T est $y = -4 - 4x$
   **c.** $f(x) - y = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$ donc au voisinage de 0, $f(x) - y$ est toujours positif donc C est au dessus de sa tangente T.

**C.**

1. $F(x) = -f'(x) + 2\, f(x) + 8e^x$
2. a. $f(x)$ est positive sur $]-\infty ; -1]$ U $[1 ; \infty[$ et négative sur $[-1 ; 1]$
   b. $A = -\int_0^1 f(x)dx = -[F(x)]_0^1 = -F(1) + F(0) = -(4 - 8 + 4)e^1 + 4 = 4\ U.A.$

*Exercice 2 :*

A.

1. p(110 ≤ X ≤ 130) = p(-1 ≤ T ≤ 1) avec T = (X-120)/10
   = 2Π(1) -1 = 0,683
2. p(X ≥ 100) = p(T ≥ -2) = Π(2) = 0,977

B.

1. p(A) = p(Y = 0) = 0,0067
2. p(B) = p(Y ≤ 4) = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) + p(Y = 3) + p(Y = 4) = 0,441

C.

1. On a une épreuve de Bernouilli (on prend un camion-benne) dont les deux issues sont
   - Le camion-benne tombe en panne le premier mois (considéré comme un échec)
   - Le camion-benne ne tombe pas en panne le premier mois (considéré comme un succès)

   p = 0,9 q = 0,1

   On répète 10 fois de manière indépendante cette épreuve
   Z est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès
   Z est donc une loi binomiale de paramètres B(10 ; 0,9)
2. $P(Z = 10) = C_{10}^{0} \times 0{,}9^{10} \times 0{,}1^{0} = 0{,}349$

D.

1. si $\bar{x}$ est dans l'intervalle [24,961 ; 25,039] on accepte l'échantillon
   si $\bar{x}$ n'est pas dans l'intervalle [24,961 ; 25,039] on rejete l'échantillon au seuil de confiance de 95%
2. 24,978 ∈ [24,961 ; 25,039] donc l'échantillon est conforme