CORRIGE

EXERCICE 1

A) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^x - 2x$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1° Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$

Nous avons $a(x) = 1$ et $b(x) = -1$

Nous recherchons alors une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)} = -1$

Nous obtenons : $G(x) = -x$

La solution de l'équation différentielle (E_0) s'écrit $\boxed{f(x) = ke^{-G(x)} = ke^x}$

2° Montrer que la fonction $g(x) = xe^x + 2x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$g(x) = xe^x + 2x + 2$ donc $g'(x) = e^x + xe^x + 2$

On remplace y' par $g'(x)$ et y par $g(x)$ dans l'équation (E):

$$e^x + xe^x + 2 - (xe^x + 2x + 2) = e^x - 2x$$
$$e^x + \cancel{xe^x} + \cancel{2} - \cancel{xe^x} - 2x - \cancel{2} = e^x - 2x$$
$$e^x - 2x = e^x - 2x$$

On a donc démontré que la fonction $g(x)$ est une solution particulière de (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

$$\boxed{y(x) = f(x) + g(x) = ke^x + xe^x + 2x + 2}$$

4° Condition initiale $f(0) = 3$.

$y(0) = ke^0 + 0e^0 + 2\times 0 + 2 = k + 2$ et on sait que $y(0) = 3$ donc $k + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{k = 1}$

On en déduit $k = 1$ et, par conséquent, la solution qui vérifie la condition initiale s'écrit :

$$\boxed{y(x) = e^x + xe^x + 2x + 2 = (x+1)e^x + 2x + 2}$$

B) Etude de fonction

1) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^x + 2x + 2 = +\infty}$

2) Asymptote en $-\infty$: Réponse **B** ($y = 2x+2$)

3) a) Développement limité :

D'après le formulaire, le DL de e^x à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit :

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

D'où

$(x+1)e^x = (x+1)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

$(x+1)e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ en en gardant que les termes d'ordre inférieur à 2

$(x+1)e^x = 1 + 2x + \dfrac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Donc

$(x+1)e^x + 2x + 2 = 1 + 2x + \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

$\boxed{(x+1)e^x + 2x + 2 = 3 + 4x + \dfrac{3x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

b) Equation de la tangente : $y = 3 + 4x$ (réponse **B**)

c) On étudie le signe de $\dfrac{3x^2}{2}$: pour tout x, $\dfrac{3x^2}{2} \geq 0$ donc la courbe C est au dessus de la tangente T (réponse **A**)

C) Calcul intégral

1) $I = \int_{-1}^{1}(2x+2)dx = \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = 1^2 + 2\times 1 - \left((-1)^2 + 2\times(-1)\right) = 3 - (-1) = 4$

2) $J = \int_{-1}^{1}(x+1)e^x dx$ on pose $u = x+1$ et $v' = e^x$ donc $u' = 1$ et $v = e^x$

$J = \int_{-1}^{1}(x+1)e^x dx = \left[u\times v\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u' \times v dx = \left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx$

On calcule $\left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{1} = 2e^1 - 0e^{-1} = 2e^1$

On calcule $\int_{-1}^{1} e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1}$

On en déduit : $J = \int_{-1}^{1} (x+1)e^x dx = 2e^1 - \left(e^1 - e^{-1}\right) = e^1 + e^{-1}$

3) a) $K = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} ((x+1)e^x + 2x+2)dx = \int_{-1}^{1} (x+1)e^x dx + \int_{-1}^{1} (2x+2)dx = I + J = 4 + e^1 + e^{-1}$

$\boxed{K = 4 + e^1 + e^{-1}}$

b) Valeur arrondie à 10^{-2} : $\boxed{K = 7.09}$

c) K représente l'aire en unité d'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C représentative de la fonction $f(x)$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

EXERCICE 2 :

A – Loi binomiale et loi de Poisson

1) a) On répète 30 fois la même épreuve aléatoire à 2 issues :

- succès (bouteille non conforme) avec une probabilité $p = 0.02$
- échec (bouteille conforme) avec une probabilité $q = 1 - p = 0.98$.

Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale B(30 ; 0.02).

b) Calcul de $P(X \leq 1)$:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= C_{30}^{0} \times 0.02^{0} \times 0.98^{30} + C_{30}^{1} \times 0.02^{1} \times 0.98^{29} \\ &= 0.545 + 0.334 \\ &= 0.879 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{P(X \leq 1) = 0.879}$

2) a) $\boxed{\lambda = n \times p = 30 \times 0.02 = 0.6}$

b) Calcul de $P(Y \leq 1)$

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) \\ &= 0.5488 + 0.3293 \\ &= 0.8781 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{P(Y \leq 1) = 0.878}$

B – Loi normale

La variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 1 donc la variable aléatoire $T = \dfrac{Z - 70}{1}$ suit la loi normale centrée réduite.

1) Calcul de $P(68 \leq Z \leq 72)$:

$$\begin{aligned} P(68 \le Z \le 72) &= P\left(\frac{68-70}{1} \le \frac{Z-70}{1} \le \frac{72-70}{1}\right) \\ &= P(-2 \le T \le 2) \\ &= 2\Pi(2)-1 \\ &= 2\times 0.9772-1 \\ &= 0.9544 \\ &\approx 0.95 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{P(68 \le Z \le 72) \approx 0.95}$

3) Calcul de h :

$$\begin{aligned} P(70-h \le Z \le 70+h) = 0.99 &\Rightarrow P\left(\frac{70-h-70}{1} \le T \le \frac{70+h-70}{1}\right) = 0.99 \\ &\Rightarrow P(-h \le T \le h) = 0.99 \\ &\Rightarrow 2\Pi(h)-1 = 0.99 \\ &\Rightarrow \Pi(h) = 0.995 \\ &\Rightarrow h = 2.58 \end{aligned}$$

Soit $\boxed{h = 2.58}$

C – Intervalle de confiance

1) $2\Pi(t)-1 = 0.95 \Rightarrow \Pi(t) = 0.975 \Rightarrow t = 1.96$

Intervalle de confiance :

$$\boldsymbol{I = \left[\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[70.12 - 1.96\frac{1}{\sqrt{100}} ; 70.12 + 1.96\frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [69.92 ; 70.32]}$$

2) Cette affirmation est <u>fausse</u>.