Exercice I : (12 pts) Correction BTS MAI 2010

$\boxed{A}$ 1°/ $y' - y = 0 \Rightarrow \boxed{y' = 1y}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation générale de (E_0) s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y_0(x) = C_1 e^x}$$

2/ $g(x) = xe^x + 2x + 2 \quad g'(x) = e^x + xe^x + 2$

$$g'(x) - g(x) = e^x + \cancel{xe^x} \cancel{+2} - \cancel{xe^x} - 2x \cancel{-2}$$

$$\boxed{= e^x - 2x}$$

La fonction g est donc solution particulière de l'équation différentielle (E)

3/ L'ensemble des solutions de (E) s'écrit $y(x) = C_1 e^x + xe^x + 2x + 2$

4/ $f(x) = C_1 e^x + xe^x + 2x + 2$ avec $f(0) = 3$

$f(0) = C_1 + 2 \iff \boxed{C_1 = 1} \qquad \boxed{f(x) = (1+x)e^x + 2x + 2}$

$\boxed{B}$ 1/ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (1+x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} (1+x)e^x = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 2 = +\infty$

2/ Réponse B : $\boxed{y = 2x + 2}$

3/ a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = (1+x) \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + 2x + 2 + x^2 \varepsilon(x) \\ f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x + x^2 + 2x + 2 + x^2 \varepsilon(x) \end{array}\right\}$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$

b) Réponse B : $y = 3 + 4x$

c) Réponse A : au dessus de la tangente T pour $\forall x$

$\boxed{C}$ Calcul intégral :

1/ $I = \int_{-1}^{1} (2x+2)\,dx = \left[x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = (1+2) - (1-2) = \boxed{4}$

2/ $J = \int_{-1}^{1} (x+1)e^x\,dx = \left[(x+1)e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x$

$u = x+1 \quad u' = 1$

$v' = e^x \quad v = e^x$

$= 2e^1 - \left[e^1 - e^{-1}\right] = \boxed{e + e^{-1}}$

3/ a) $K = I + J = \boxed{4 + e + e^{-1}}$

b) $K = 7,08$ à 10^{-2} près

c) Sur $[-1;1]$ l'Aire est au dessus de l'axe des abscisses donc $f(x) \geq 0$

Exercice II :

A 1°a) L'épreuve de Bernouilli est : " on répète 30 fois de manière indépendante un tirage avec remise de bouteille. La probabilité de (E) est $p = 0,02$

La loi Binomiale s'écrit $\underline{B(30 ; 0,02)}$

b) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= C_{30}^{0} \times 0,02^{0} \times (1-0,02)^{30} + C_{30}^{1} \times 0,02^{1} \times (1-0,02)^{30-1}$

$= 0,98^{30} + (30 \times 0,02 \times (0,98)^{29})$

$\boxed{= 0,879 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

2a) $\lambda = n \times p = 30 \times 0,02 = \underline{0,6}$

b) $P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$ | d'après la table sur la loi de Poisson

$= 0,8781$

soit $\underline{0,878 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

B 1/ $\mathcal{N}(70 ; 1)$ $T = \dfrac{\bar{x} - 70}{1}$ suit la loi normale centrée réduit

$p(68 \leq Z \leq 72) = p(68-70 \leq T \leq 72-70)$

$= p(-2 \leq T \leq 2)$

$= 2 \times \Pi(2) - 1$

$= (2 \times 0,9772) - 1$

$= 0,9544$ soit $\boxed{0,95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

2/ $p(70 - h \leq Z \leq 70 + h) = 0,99$

$p(-h \leq T \leq h) = 0,99$

$2 \times \Pi(h) - 1 = 0,99$

$\Pi(h) = 0,995$ $\Pi(2,58) = 0,9951$

$\Pi(h) = \Pi(2,58)$

$\boxed{h = 2,58}$

C 1/ $\left[\bar{x}_e - t_e \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_e + t_e \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

or $t_e = 1,96$ car coefficient de confiance de 0,95

$\left[70,12 - 1,96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} ; 70,12 + 1,96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} \right]$ avec $\sigma = 1$

$\boxed{[69,92 ; 70,32]}$

2/ <u>obligatoirement</u> $\Rightarrow$ affirmation fausse