Corrigé MATHS 2011 BTS BAT

*Exercice 1 :

A) 1°. a) $r^2 - 3r + 2 = 0$

d'où $\Delta = 1$ (>0)

donc l'équation a 2 solutions réelles :

$$r_1 = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1$$

b) les solutions de (E_0) est :

$$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{x}$$

2° a) $g'(x) = (2x+2)e^{x}$

b) $g''(x) = 2e^{x} + (2x+2)e^{x}$
$= (2x+4)e^{x}$

et $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = (2x+4)e^{x} - 3(2x+2)e^{x} + 2(2xe^{x}+3)$
$= (2x+4)e^{x} - (6x+6)e^{x} + 4xe^{x} + 6$
$= 2e^{x} + 6$

Soit $g(x)$ est une solution particulière de (E).

3° L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est :

$$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{x} + g(x)$$
$$= \lambda e^{2x} + \mu e^{x} + 2xe^{x} + 3$$

4°. $f(0) = 2 \Leftrightarrow \lambda + \mu = -1$

. $f'(x) = 2\lambda e^{2x} + \mu e^{x} + (2x+2)e^{x}$

donc $f'(0) = 1 \Leftrightarrow 2\lambda + \mu = -1$

on obtient : $\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ 2\lambda + \mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = -1 \end{cases}$

B) 1° a) $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) on obtient donc une asymptote d'équation $y = 3$ (en $-\infty$).

2° a) développement limité à l'ordre 2 de e^x :

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

donc : $f(x) = (2x-1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + 3$

$= 2 + x + \frac{3}{2} x^2 + x^2 \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0$

b) équation de la tangente T :

$y = x + 2$

c) $\frac{3}{2} x^2$ est positif au voisinage de 0

3° a) $e^x > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $2x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Variation : f est décroissant sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$

et f est croissant sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

b) minimum : $y = 1,787$

4° a) $I = \int_0^{0,5} 2 + x + \frac{3}{2} x^2 \, dx$

$= \left[2x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x^3 \right]_0^{0,5}$ $\Leftrightarrow$ $I = 1,1875$

b) $K = \int_0^{0,5} (2x-1) e^x \, dx$

$u(x) = 2x - 1$ $\quad u'(x) = 2$
$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$K = \left[(2x-1) e^x \right]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} 2 e^x \, dx$

$= \cancel{+}1 - \left[2 e^x \right]_0^{0,5}$

$= 1 - \left(2 e^{0,5} - 2 \right) \Leftrightarrow K = 3 - 2 e^{0,5}$

c) $J = \int_0^{0,5} f(x) \, dx = \int_0^{0,5} (2x-1) e^x + 3$

$= K + \int_0^{0,5} 3 \, dx$

$= 3 - 2e^{0,5} + 1,5 \Leftrightarrow J = \frac{9}{2} - 2 e^{0,5}$

d) $J - I = 0,015$ $(< 0,02)$

exercice 2

A) 1°. X suit la loi $N(8,33; 0,09)$

donc $T = \frac{X - 8,33}{0,09}$ suit la loi $N(0;1)$

alors : $p(8,18 < X < 8,48) = p(-1,667 < T < 1,667)$

$= 2\Pi(1,667) - 1$

$= 0,905$

2°. $p(8,33 - h \leq X \leq 8,33 + h) = 0,95$

$\Leftrightarrow p\left(\frac{-h}{0,09} \leq T \leq \frac{h}{0,09}\right) = 0,95$

$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0,09}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,09}\right) = 0,975$

et : $\Pi(1,96) = 0,975$ donc $\frac{h}{0,09} = 1,96 \Leftrightarrow h = 0,176$

B) 1°. justification ....

2°. $p(X = 5) = C_{50}^{5} \times 0,096^{5} \times 0,904^{45}$

$= 0,184$

3°. $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$

$= 0,129$

C) 1° $I = [8,106 ; 8,154]$ (I étant l'extérieur de la zone critique.)

règle de décision :

on prélève un échantillon de taille N et on calcul sa moyenne $\bar{d}$:

si $\bar{d} \in I$, on valide H_0

si $\bar{d} \notin I$, on rejette H_0, on valide H_1

2°. ici $\bar{d} = 8,16 \notin I$, on rejette H_0 pour valider H_1

La livraison n'est donc pas conforme pour le diamètre.