Corrigé 2009

Mathématiques BTS Groupement A1

Proposition de corrigé réalisé par les membres du site http://www.aidexam.com

Exercice 1 :

Partie A :

1. La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500 * \tau$

   Dans cette question $\tau = 0{,}01$ donc $\lambda = 500 * 0{,}01 = 5$ ➔ $P(5)$

   a) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

   $= 0{,}007 + 0{,}034$

   $= 0{,}041$

   b) La démarche utilisée est la suivante :

   $P(X > no) < 0.05 = \sum_{n=0}^{n=no} P(X = n) \geq 1 - 0{,}05 \geq 0.95$

   Alors prenons $n_0 = 8$

   $$\sum_{n=0}^{n=8} P(X = n) = 0.934 \; donc \sum_{n=0}^{n=8} P(X = n) < 0.95$$

   Alors prenons no = 9

   $$\sum_{n=0}^{n=9} P(X = n) = 0.97 \; donc \sum_{n=0}^{n=9} P(X = n) \geq 0.95$$

   $Donc\; no = 9$

2. La loi de Poisson est approximée par une loi normale de paramètres $\mu = 100 \; et \; \sigma = 10$:

   a) $P(X > 120) = 1 - P(X \leq 120) = 1 - P\left(\frac{X-100}{10} \leq \frac{120-100}{10}\right)$

   $= 1 - P(T \leq 2)$

   $= 1 - \pi(2)$

   $= 1 - 0{,}9772$

   $= 1 - P(T \leq 2)$

$= 0{,}0228$

b) $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = \left(\frac{100-a-100}{10} \leq \frac{X-100}{10} \leq \frac{100+a-100}{10}\right)$

$$= \left(\frac{-a}{10} \leq T \leq \frac{a}{10}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{a}{10}\right) - \pi\left(-\frac{a}{10}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{a}{10}\right) - \left(1 - \pi\left(\frac{a}{10}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\frac{a}{10}\right) - 1 + \pi\left(\frac{a}{10}\right)$$

$$= 2 * \pi\left(\frac{a}{10}\right) - 1$$

donc,

$$2 * \pi\left(\frac{a}{10}\right) - 1 = 0{,}99$$

$$\pi\left(\frac{a}{10}\right) = \frac{1 + 0{,}99}{2} = 0{,}995$$

$$\frac{a}{10} = 2{,}575$$

$$a = 10 * 2{,}575$$

$$a = 25{,}75$$

Partie B :

1. Y suit une loi binomiale.

a) Ses paramètres sont :

$n = 30 \;\; et \;\; p = 0{,}01$ On peut également calculer $q = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= C_{30}^{0} * 0{,}01^{0} * 0{,}99^{30-0} + C_{30}^{1} * 0{,}01^{1} * 0{,}99^{30-1} + C_{30}^{2} * 0{,}01^{2} * 0{,}99^{30-2}$$

$$= 0{,}997$$

2.

a) La loi de probabilité de Z est une loi binomiale.

b) $E(Z) = np = 365 * 0{,}01 = 3{,}65$

$\sigma(Z) = \sqrt{npq} = \sqrt{365 * 0{,}01 * 0{,}99} = 1{,}9$

Partie C :

1.

a) $P(T \leq t) = \int_0^t 500 * e^{-500x} dx$

$= 500 * -\frac{1}{500}[e^{-500x}]_0^t = -[e^{-500t} - e^0] = -e^{-500t} + 1$

$= 1 - e^{-500t}$

b) $P(T \leq t) = 0{,}95$

$1 - e^{-500t} = 0{,}95$

$e^{-500t} = 1 - 0{,}95$

$\ln(e^{-500t}) = \ln(0{,}05)$

$-500t = \ln(0{,}05)$

$t = \frac{ln(0{,}05)}{-500}$

$t = 0{,}006$

2.

a) $I(t) = \int_0^t 500 * x * e^{-500x} = 500 * (-\frac{1}{500} * [x * e^{-500x}]_0^t - * (-\frac{1}{500}) \int_0^t e^{-500x} * dx)$

$= 500 * (\left(-\frac{1}{500} * t * e^{-500t} - 0\right) + \frac{1}{500} * \frac{-1}{500} * [e^{-500x}]_0^t)$

$= 500 * (\left(-\frac{1}{500} * t * e^{-500t}\right) - \frac{1}{500^2} * (e^{-500t} - 1)\ )$

$= \left(-t - \frac{1}{500}\right) e^{-500t} + \frac{1}{500}$

b) $m = \lim_{\infty} I(t) = 0{,}02\ car\ \lim_{t\to+\infty} e^{-500t} = 0\ et\ \lim_{t\to+\infty} t * e^{-500t} = 0$

Exercice 2

Partie A :

Soit $s_1(t)+\int_0^t s_1(u)du=U(t)$

1. On applique les transformations directement :

$$S_1(p)+\frac{S_1(p)}{p}=\frac{1}{p}$$

$$pS_1(p)+S_1(p)=1$$

$$(p+1)S_1(p)=1$$

Donc : $S_1(p)=\dfrac{1}{p+1}$

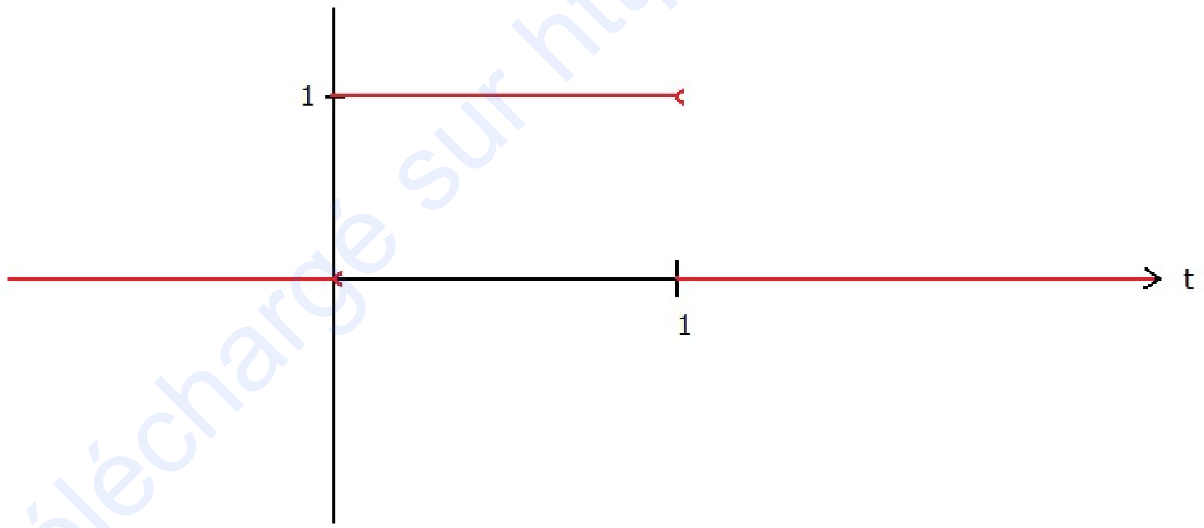
2. On retourne à l'originale de $S_1(p)$:

$$s_1(t)=e^{-t}U(t)$$

Partie B :

Soit $s_2(t)+\int_0^t s_2(u)du=U(t)-U(t-1)$

a) Représentation graphique de e_2 :



b) On applique les transformations directement :

$$S_2(p)+\frac{S_2(p)}{p}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}$$

$$pS_2(p)+S_2(p)=1-e^{-p}$$

$$pS_2(p)+S_2(p)=1-e^{-p}$$

$$(p+1)S_2(p)=1-e^{-p}$$

$$S_2(p)=\frac{1-e^{-p}}{p+1}$$

c) Retour à l'original

a)

$$s_2(t)=e^{-t}U(t)-e^{-(t-1)}U(t-1)$$

$$s_2(t)=e^{-t}U(t)-e^{-t+1}U(t-1)$$

b)

- Pour $t<0$:

On a $U(t)=U(t-1)=0$, donc on a bien $s_2(t)=0$

- Pour $0\leq t<1$:

On a $U(t)=1$ et $U(t-1)=0$, donc on a bien $s_2(t)=e^{-t}$

- Pour $t\geq 1$:

On a $U(t)=U(t-1)=1$, donc $s_2(t)=e^{-t}-e^{-t+1}=e^{-t}-e\times e^{-t}=-e^{-t}(e-1)$

On a bien $s_2(t)=-e^{-t}(e-1)$

d) Sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle]1 ; +∞ [:

Sur cet intervalle : $s_2(t)=-e^{-t}(e-1)$

Donc $s'_2(t)=-\left(-e^{-t}(e-1)\right)=e^{-t}(e-1)$

$e-1\approx 1.72>0$ et $e^{-t}>0$, donc $s'_2(t)>0$, ce qui signifie que $s_2(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle]1 ; +∞ [

e)

$$s_2(1^+)-s_2(1^-)=-e^{-1}(e-1)-e^{-1}=-e\times e^{-1}$$

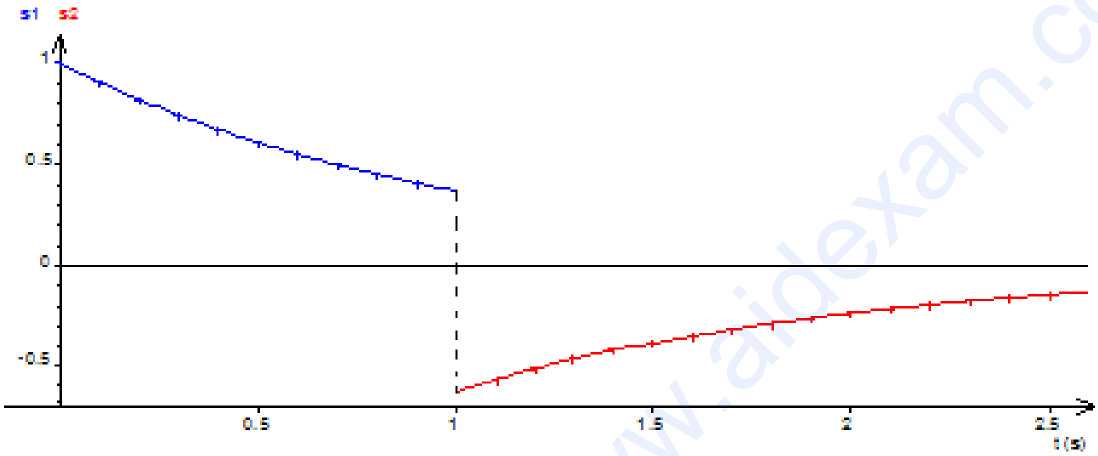
$$s_2(1^+) - s_2(1^-) = -1$$

f)

a)

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$	-0,63	-0,57	-0,38	-0,23	-0,14

b) Document réponse figure 2 :



Partie C :

Soit $s_3(t) + \int_0^t s_3(u)du = U(t) - U(t-1) + U(t-1.1)$

1.

a)

- Sur $]-\infty\ ; 0[$:

  $U(t) = U(t-1) = U(t-1.1) = 0$, donc $e_3(t) = 0$

  On a bien $e_3(t) = e_2(t)$

- Sur $[0\ ; 1[$:

  $U(t) = 1$ et $U(t-1) = U(t-1.1) = 0$, donc $e_3(t) = 1$

  On a bien $e_3(t) = e_2(t)$

- Sur $[1\ ; 1.1[$:

  $U(t) = U(t-1) = 1$ et $U(t-1.1) = 0$, donc $e_3(t) = 0$

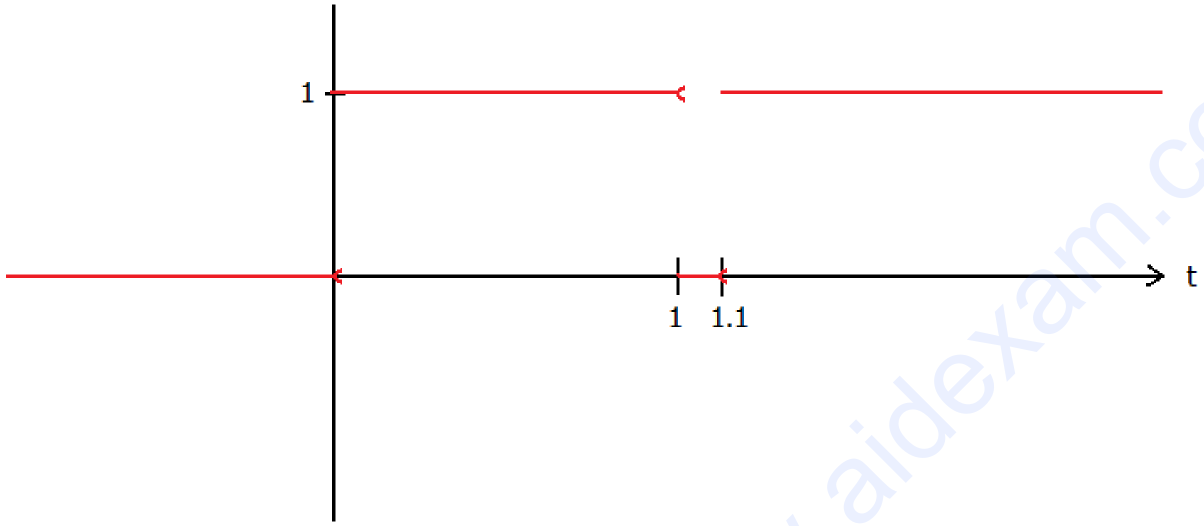
  On a bien $e_3(t) = e_2(t)$

En conclusion on a bien $e_3(t) = e_2(t)$ sur l'intervalle $]-\infty\ ; 1.1[$

b) Pour $t \geq 1$:

On a $U(t) = U(t-1) = U(t-1.1) = 1$, donc $e_3(t) = 1$

c) Représentation graphique de e_3 :



2. Sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1.1\ ;+\infty[$:

Sur cet intervalle $s_3(t) = e^{-t}\left(1 - e + e^{1.1}\right)$

Donc $s'_3(t) = -e^{-t}\left(1 - e + e^{1.1}\right)$

$\left(1 - e + e^{1.1}\right) = 1.29 > 0$

$-e^{-t} < 0$

Par conséquent, $s'_3(t) < 0$, ce qui signifie que $s_3(t)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]1.1\ ;+\infty[$

3.

$$s_3(1^+) - s_3(1^-) = e^{-1.1}\left(1 - e + e^{1.1}\right) - \left(-e^{-1.1}(e-1)\right)$$

$$s_3(1^+) - s_3(1^-) = e^{-1.1} - e \times e^{-1.1} + 1 + e \times e^{-1.1} - e^{-1.1}$$

$$s_3(1^+) - s_3(1^-) = 1$$

4.

a)

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$	0,43	0,29	0,17	0,11

b) Document réponse figure 3 :