Eléments pour un corrigé.

Exercice 1 (11 points)

1. a) La fonction de transfert H du système est définie par S(p) = H(p)×E(p), et $H(p) = \frac{1}{1+2p}$ et e(t) = U(t).

Or (th.1) $E(p) = \frac{1}{p}$ d'où $S(p) = \frac{1}{p(1+2p)}$

Th.1 (formulaire) : $£ : U(t) \to \frac{1}{p}$

b) Trouver les réels α et β tels que $S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+\frac{1}{2}}$, revient à trouver α et β tels que, par exemple, pour tout p, $\frac{1}{p(1+2p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+\frac{1}{2}}$,

soit encore, pour tout p, $\frac{1}{p(1+2p)} = \frac{(2\alpha+2\beta)p+\alpha}{p(2p+1)}$,

soit encore (th.2 et th.3) $\begin{cases} 2\alpha+2\beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$, soit encore α = 1 et β = -1.

Th.2 : si $B \neq 0$ alors $\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \Leftrightarrow A = C$

Th.3 : un polynôme a une unique écriture développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable.

De b), on en déduit que, pour tout p, $S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$ d'où (th.4, th.5, th.1 et th.6), $s(t) = U(t) - e^{-\frac{t}{2}}U(t)$.

Th.4 : si $£^{-1} : X \to x$ et $£^{-1} : Y \to y$, alors : si X(p) = Y(p) alors x(t) = y(t)

Th.5 : $£^{-1}$ est linéaire

Th.6 (formulaire) :

$£^{-1} : \frac{1}{p+a} \to e^{-at}U(t)$

2. a) Par abus d'écriture, et par calculs « évidents », on a

$F(z) = H\left(\frac{10z-10}{z+1}\right) = \frac{1}{1+2\frac{10z-10}{z+1}} = \frac{z+1}{z+1+20z-20} = \frac{z+1}{21z-19}$.

b) On a, pour tout entier naturel , x(n) = U(0,2n) = 1 = e(n).

Par suite (th.7) $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

Th.7 (formulaire) : $Z : e(n) \to \frac{z}{z-1}$

c) Par abus d'écritures, pour tout z,

$$\frac{z}{z-1} - \frac{20}{21}\left(\frac{z}{z-\frac{19}{21}}\right) = \frac{z}{z-1} - \frac{20z}{21z-19} = \frac{21z^2-19z-(20z^2-20z)}{(z-1)(21z-19)} = \frac{z^2+z}{(z-1)(21z-19)}.$$

Or, en utilisant b), $Y(z) = F(z) \times X(z) = \frac{z+1}{21z-19} \times \frac{z}{z-1} = \frac{z^2+z}{(z-1)(21z-19)}$

D'où $Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{20}{21}\left(\frac{z}{z-\frac{19}{21}}\right)$.

Par suite (linéarité de la transformation en Z, th.7 et th.8) $y(n) = e(n) - \frac{20}{21}\left(\frac{19}{21}\right)^n e(n)$

Th.8 (formulaire) :

$Z : a^n e(n) \to \frac{z}{z-a}$

3. Compléter, sur **l'annexe, à rendre avec la copie**, le tableau en donnant des valeurs approchées à 10^{-3} près des résultats demandés.

n	y(n)	t = 0,2n	s(t)
0	0,047	0	0
1	0,138	0,2	0,095
5	0,422	1	0,393
10	0,649	2	0,632
15	0,787	3	0,776
20	0,871	4	0,864
25	0,921	5	0,917
50	0,993	10	0,993

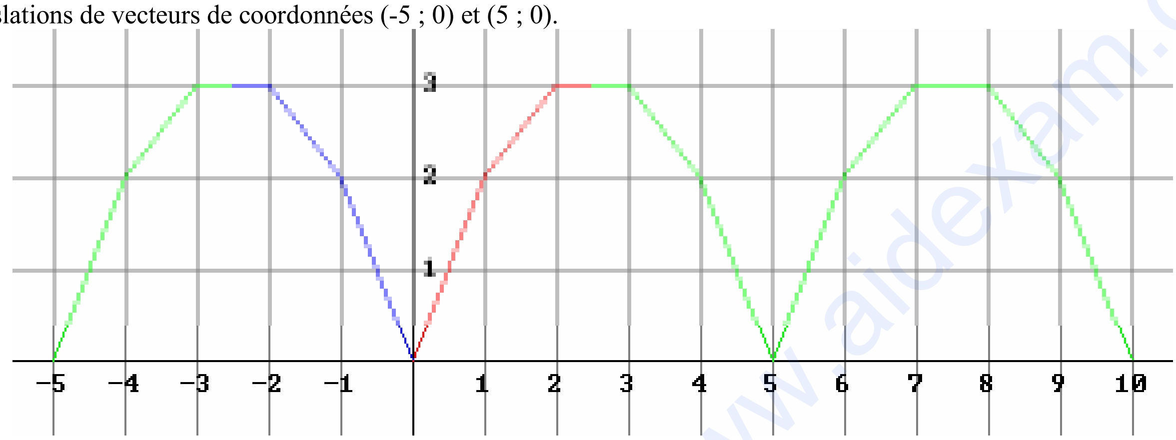
Eléments pour un corrigé.

Exercice 2 (9 points)

Partie A :

1. En remplaçant E par 2, $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \le t < 1 \\ t+1 & \text{si } 1 \le t < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \le t \le \frac{5}{2} \end{cases}$.

2. Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-5 ; 10] : d'abord sur $\left[0 ; \frac{5}{2}\right]$ (en rouge), puis sur $\left[-\frac{5}{2} ; 0\right]$ (en bleu) par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées, puis (en vert) sur le reste de [-5 ; 10] par translations de vecteurs de coordonnées (-5 ; 0) et (5 ; 0).



Partie B :

1. Algébriquement, en utilisant les th.1 et th.2, et les données de l'énoncé, la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0 = \frac{1}{5}\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt$.

Par ailleurs f étant paire, alors (th.3) $\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt$.

De plus (th.4) $\int_{0}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt$,

soit, compte tenu de l'expression de f suivant les intervalles :

$\int_{0}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt = \int_0^1 Et\,dt + \int_1^2 \left((3-E)t + 2E - 3\right)dt + \int_2^{\frac{5}{2}} 3\,dt$,

soit (primitives évidentes)

$\int_{0}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt = \left[E\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[(3-E)\frac{t^2}{2} + (2E-3)t\right]_1^2 + \left[3t\right]_2^{\frac{5}{2}}$,

soit encore

$\int_{0}^{\frac{5}{2}} f(t)\,dt = \frac{E}{2} + 2(3-E) + 2(2E-3) - \left[\frac{(3-E)}{2} + (2E-3)\right] + \frac{3}{2} = E + 3$

d'où finalement $a_0 = \frac{2}{5}(E+3) = 2\frac{E+3}{5}$.

Th.1 : Si une fonction f est T-périodique et de pulsation ω, alors les coefficients de Fourier de f sont donnés (α étant une constante arbitraire) par $a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt$ (valeur moyenne de f sur un intervalle de longueur T),

et pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1,

$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$ et

$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$.

Th.2 : Dans les conditions ci-dessus, a_0 est la valeur moyenne de f sur un intervalle de longueur T.

Th.3 : Si f est paire et intégrable sur [-a ; a], alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.

Th.4 (relation de Chasles) : si f est intégrable sur [a ; b] et [b ; c], alors $\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$.

2. Th.5 : Dans les conditions du th.1, les coefficients b_n de Fourier d'une fonction paire sont nuls.
Ici, la fonction étant paire (donnée de l'énoncé), en appliquant le th.5, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $b_n = 0$.
pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1.

Eléments pour un corrigé.

3.a) En utilisant les th.6, th.7, th.8

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt = \left[t\times\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right]_0^1 - \frac{5}{2n\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt\ ,$$

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt = \left[t\times\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right]_0^1 - \frac{5}{2n\pi}\left[-\frac{5}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right]_0^1,$$

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt = \frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\frac{25}{4n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right]$$

Th.6 (intégration par parties, formulaire) :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Th.7 : linéarité de l'intégration.

Th.8 : (sin ax)' = a cos ax

(cos ax)' = -a sin ax

b) Les données et l'application des th.1, th.3 permettent d'écrire :

$$a_n = \frac{2}{5}\times 2\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)dt\ ,\ \text{d'où}$$

$$a_n = \frac{2}{5}\times 2\left[\frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right)\right]$$

$$\text{et } a_n = \frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right)$$

4.a) Pour tout nombre réel t, sachant b_n est nul pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_5(t) = a_5\cos(2\pi t)$.

Or (3)b)), $a_5 = \frac{5}{25\pi^2}\left((2E-3)\cos(2\pi)+(3-E)\cos(4\pi)-E\right) = 0$ (car $\cos 2\pi = \cos 4\pi = 1$),

d'où, pour tout réel t, $u_5(t) = 0$.

b) Par analogie avec a), pour tout réel t, $u_3(t) = a_3\cos\left(\frac{6\pi}{5}t\right)$,

avec (3)b)), $a_3 = \frac{5}{9\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-E\right)$.

La fonction u_3 est nulle si et seulement si $a_3 = 0$,

soit encore, si et seulement si $(2E-3)\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-E = 0$,

soit encore, si et seulement si $\left(2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-1\right)E = 3\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-3\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)$,

$$\text{soit } E = \frac{3\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-3\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)}{2\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{12\pi}{5}\right)-1}$$

On a $E \approx 1{,}14$.